

№

11.1. Пусть N -число учеников в классе.

Для Марка:

Пусть Марк стоит на m месте сверху (в порядке убыв. роста).
Выше него $m-1$ человек, ниже него $N-m$ человек.

Условие: $m-1 \equiv 4 (N-m)$

$$m-1 \equiv 4N-4m$$

$$5m-1 \equiv 4N$$

$$5m \equiv 4N+1$$

$$m \equiv \frac{4N+1}{5}$$

m - натуральное число, $1 \leq m \leq N$

Для Талины:

Пусть Талина стоит на r месте сверху
Впереди нее (выше) $r-1$ человек, позади $N-r$ человек.

Условие: $N-r \equiv 3(r-1)$

$$N-r \equiv 3r-3$$

$$N+3 \equiv 4r$$

$$r \equiv \frac{N+3}{4}$$

Оба m и r - разные натур. числа. Из $m \equiv \frac{4N+1}{5}$ и $r \equiv \frac{N+3}{4}$

следует, что N делится на 4 и $4N+1$ делится на 5.

Проверим $N \leq 30$

N кратно 4: $N = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28$

Проверим $4N+1$ кратно 5:

1) $N=4: 4 \cdot 4 + 1 = 17$ - нет

2) $N=8: 33$ - нет

3) $N=12: 49$ - нет

4) $N=16: 65$ - да, $m=13$

Итого, $N=16$

Проверим: $m=13, r \equiv \frac{16+3}{4} = \frac{19}{4}$ - нет, $r \equiv \frac{16+3}{4} = \frac{19}{4}$ - не целое

$r \equiv \frac{16+3}{4} = \frac{19}{4} = 4,75$ - не целое

Значит, N должно делиться на 4. Но 13 должно делиться на 4?

Нет, $r \equiv \frac{N+3}{4} \Rightarrow N+3$ кратно 4, т.е. $N \equiv 1$ и $4N+1$ кратно 5:

$4N+1 \equiv 0 \Rightarrow 4N \equiv -1 \equiv 4 \Rightarrow N \equiv 1$

Итого: $N \equiv 1$ и $N \equiv 1 \Rightarrow N \equiv 1$

$N \leq 30 \Rightarrow N=21$

Проверим:

$m \equiv \frac{4 \cdot 21 + 1}{5} = \frac{85}{5} = 17$

$r \equiv \frac{21+3}{4} = \frac{24}{4} = 6; N=21 \leq 30$

Ответ: 21

11.2.

Пусть число $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, обратное $\overline{cba} = 100c + 10b + a$

Уравнение:

$$\overline{abc} - 3 \cdot \overline{cba} = 1$$

$$100a + 10b + c - 300c - 30b - 3a = 1$$

$$97a - 20b - 299c = 1$$

$$\text{Упростим } 97a - 299c - 1 = 20b$$

Правая часть $20b$ делится на 20, ч. $0 \leq b \leq 9$, значит $0 \leq 20b \leq 180$
Переберем a, c в пределах, $a \geq 1, a \neq c$

$$a = 7, c = 2$$

$$97 \cdot 7 - 299 \cdot 2 - 1 = 679 - 598 - 1 = 80 \Rightarrow 20b = 80 \Rightarrow b = 4$$

$$\text{Проверим: } 742 - 247 = 495; 495 - 247 = 248; 248 - 247 = 1.$$

Ответ: 742.

11.3.

$$2x^2 + 5\sqrt{1-x^2} - 5 = 0$$

$$\text{Область: } 1 - x^2 \geq 0 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Пусть } t = \sqrt{1-x^2} \geq 0, \text{ тогда } x^2 = 1 - t^2$$

$$\text{Уравнение: } 2(1-t^2) + 5t - 5 = 0$$

$$2 - 2t^2 + 5t - 5 = 0$$

$$-2t^2 + 5t - 3 = 0$$

$$2t^2 - 5t + 3 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$t_1 = 1,5; t_2 = 1$$

 $t \geq 0$, но $t = \sqrt{1-x^2} \leq 1$, так что $t = 1,5$ не подходит

$$t = 1 \rightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \rightarrow 1-x^2 = 1 \rightarrow x = 0$$

$$\text{Проверка: } 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 - 5 = 0 - \text{верно}$$

Ответ: 0.

1.1.4.

~~Треугольник~~ Треугольник KLM , $\angle K$ - остр., KP - бис., LH - высота
 $\angle KPL = 45^\circ$ Найти $\angle PHM$

Решение: ~~$\angle KPL = 45^\circ$~~ $\angle LKP = \alpha$ (половина $\angle K$)

$$\angle KLP = \angle KLM = \beta$$

$$\angle KPL = 45^\circ$$

сумма углов треуг. KPL :

$$\alpha + \beta + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 135^\circ$$

В $\triangle KLM$:

$$2\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\text{Вычитаем: } (2\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 135^\circ$$

$$\alpha + \gamma = 45^\circ$$

Рассматриваем четырехугольник $KHLP$.

$$\angle LHP = 90^\circ \text{ (высота)}$$

$$\angle KPL = 45^\circ$$

$$\angle PHM = \angle KPL = 45^\circ$$

Ответ: $\angle PHM = 45^\circ$

1.1.5

$$T_n = \frac{10^n - 1}{3}$$

Дано:

$$f(T_n) = T_{2n}$$

$$\text{Но } T_{2n} = \frac{10^{2n} - 1}{3} = \frac{(10^n - 1)(10^n + 1)}{3} = T_n \cdot (10^n + 1)$$

$$\text{Т.к. } T_n = x, \text{ то } 10^n = 3x + 1$$

Подставляем:

$$f(x) = x \cdot (3x + 1 + 1) = x(3x + 2) = 3x^2 + 2x$$

Это верно для любого значения $x = T_n$, значит

$$f(x) = 3x^2 + 2x, \text{ для всех } x.$$

Ответ: $3x^2 + 2x$